AMERICAN JOURNAL OF SOCIAL SCIENCE
ISSN: 2996-5306 (online) | ResearchBib (IF) = 10.67 IMPACT FACTOR
Volume-4| Issue-1| 2026 Published: |30-01-2026|

IKKINCHI TARTIBLI PARABOLO-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN INTEGRA SHARTLI MASALA

https://doi.org/10.5281/zenodo.18146247

Khalilov Kobiljon Solijonovich
[1]*Associate Professor of Fergana State University*
qsxalilov@gmail.com
ORCID 0000-0001-6934-6008
Mo'ydinova Shoxsanamxon Madaminjom qizi
[2]*Master student of Fergana State University*
shohsanamhon27@gmail.com
ORCID 0009-0000-3873-0699

A PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR THE SEKOND-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE DIFFERENTIAL EQUATION

ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Annotation

In the present paper, a problem with an integral condition for a model second-order parabolic-hyperbolic equation has been considered. The unique solvability of the problem has been proved using the theory of integral equations.

Annotatsiya

Ushbu maqolada ikkinchi tartibli parabola-giperbolik tipdagi model tenglama uchun integral shartli masala qaralgan. Masalaning bir qiymatli yechilishi integral tenglamalar nazariyasi yordamida isbotlangan.

Аннотация

В данной статье рассматривается задачи с интегральным условием для модельного уравнений параболо-гиперболического типа второго порядка. Поставленных задач доказана однозначой разрешимости с использованием теории интегральных уравнений.

Keywords

Parabolic-hyperbolic equation, Fourier equation, D`Alambert`s equation, integral condition, Volterra integral equation, Abel integral equation.

Kalit so'zlar

Parabolo-giperbolik tenglama, Furye tenglamasi, Dalamber tenglamasi, integral shart, Volterra integral tenglamasi, Abel integral tenglamasi.

Ключевые слова

Уравнение параболо-гиперболического, уравнение Фурье, уравнение Даламбера, интегральное условие, интегральное уравнения Вольтерра, интегральное уравнение Абеля.

Kirish: Aralash tipdagi tenglamalarni oʻrganish XX asrning oʻrtalaridan boshlangan boʻlib, bunday tenglamalar uchun respublikamiz va xorijiy olimlar tomonidan masalalar qoʻyilgan va tadqiq qilingan. Hozirda ham aralash tipdagi tenglamalar uchun turli masalalarni oʻrganish jadal rivojlanmoqda. Ayniqsa, xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun integral shartli masalalarni oʻrganishga tadqiqotchilar tomonidan tobora qiziqish ortib bormoqda. Dastlab Dj.Kennon, L.I.Kamninlar tomonidan birinchi tur integral shartli masalalar, ikkinchi tur integral shartli masala esa D.G.Gordeziani va G.A.Avalishnili hamda boshqa tadqiqotchilar tomonidan tadqiq qilgan. Ikkinchi tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun integral shartli masalalarni esa A.Q.Oʻrinov, Q.S.Xalilov, Sh.T.Nishonova, A.O.Mamanazarov hamda boshqalar tomonidan oʻrganilgan.

xOy tekisligining $x=0, y=1, x=1$ toʻgʻri chiziqlar hamda tor tebranish tenglamasining $x+y=0$, $x-y=1$ xarakteristikalari bilan chegaralangan chekli sohani D deb va ushbu $D_1=\left[D\cap(y>0)\right]\cup AB$, $D_2=D\cap(y<0)$, $AB=\left\{(x,0):0<x<1\right\}$, $AE=\left\{(x,y):y=-x, 0<x<\frac{1}{2}\right\}$ belgilashlarni kiritaylik.

Ushbu

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y, \ (x,y)\in D_1, & (x,y)\in D_1=D\cap(y>0), \\ u_{xx}-u_{yy}, \ (x,y)\in D_2, & (x,y)\in D_2=D\cap(y<0) \end{cases} \qquad (1)$$

tenglama uchun D sohada quyidagi masalani oʻrganamiz. D_1 sohada (1) tenglama parobolik tipga, D_2 sohada esa giperbolik tipga tegishli, $D_0=D\cap(y=0)$ chiziq esa tip oʻzgarish chizigʻi va tenglamaning xarakteristikasi boʻladi.

1-masala. Shunday $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^{2,1}_{x,y}(D_1)\cap C^{2}_{x,y}(D_2)$ funksiya topilsinki, u D_1va D_2 sohada (1) tenglamani regulyar yechimi hamda

$$u(0,y)=\int_0^1 u(x,y)dx+\mu_1(y), \quad 0\le y\le 1; \qquad (2)$$

$$u(1,y)=\mu_2(y), \quad 0\le y\le 1; \qquad (3)$$

$$u(x,-x)=\psi(x), \quad 0\le y\le \frac{1}{2}; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to+0} u_y(x,y)=\lim_{x\to-0} u_y(x,y), \quad 0<x<1 \tag{5}$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\mu_1(y),\mu_2(y),\psi(x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar boʻlib, $\psi(0)=\mu_1(0)$.

Quyidagi teorema oʻrinli.

Teorema. Faraz qilaylik, $\psi(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\mu_1(y),\mu_2(y)\in C[0,1]$. U holda 1-masala yagona yechimga ega boʻladi.

Isbot. Aytaylik, $u(x,y)$ funksiya qoʻyilgan masalaning yechimi boʻlsin. Masala shartiga asoslanib, $u(x,y)\in C(\bar{D})$ ekanligini eʼtiborga olib, quyidagi belgilash va farazlarni kiritaylik:

$$\left.\begin{aligned} &u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x), \quad 0\le x\le 1;\\ &\lim_{y\to+0} u_y(x,y)=\lim_{y\to-0} u_y(x,y)=\nu(x), \quad 0<x<1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Faraz qilaylik, $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \nu(x)\in C^1(0,1)\cap L(0,1)$. U holda, $u(x,y)$ funksiya D_2 sohada, $u_{xx}-u_{yy}=0$ tenglama uchun qoʻyilgan Koshi masalasining yechimi [7]:

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu(\xi)d\xi \tag{7}$$

koʻrinishda yoziladi.

(7) formuladan $u(x,y)$ funksiyani (4) shartga boʻysundirsak,

$$\tau(0)+\tau(2x)-\int_0^{2x}\nu(\xi)d\xi=2\psi(x)$$

kelib chiqadi. Oxirgi tenglikda $2x=z\in[0,1]$ belgilash kiritib, z oʻzgaruvchi boʻyicha hosila hisoblaymiz. Soʻngra z ni x ga ekvivalent almashtirib D_2 sohada $\tau(x)$ *va* $\nu(x)$ noʻmalum funksiyalar oʻrtasidagi

$$\nu(x)=\tau'(x)-\psi'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0<x<1 \tag{8}$$

asosiy funksional munosabatga ega boʻlamiz.

D_1 sohada nomaʼlum funksiya $u(x,y)\in C(\bar{D})$ va $u_y(x,y)\in C(D)$ ekanligini eʼtiborga olib, (1) tenglama va (2), (3) chegaraviy shartlardan $y\to+0$ da limitga oʻtsak,

$$\tau''(x)-\nu(x)=0, \quad 0<x<1; \tag{9}$$

$$\tau(0)=\int_0^1 \tau(x)dx+\mu_1(0),\ \tau(1)=\mu_2(0) \qquad (10)$$

hosil boʻladi.

(8) dan $\nu(x)$ funksiyani (9) olib borib qoʻysak, $\tau(x)$ nomaʼlum funksiyaga nisbatan oddiy differensial tenglamaga ega boʻlamiz:

$$\tau''(x)-\tau'(x)=-\psi'\left(x/2\right), \qquad 0<x<1. \qquad (11)$$

Oxirgi oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimini differensial tenglamalar nazariyasidan maʼlum usul yordamida aniqlab, soʻngra (10) shartga boʻysundirsak, noʻmalum $\tau(x)$ funksiyani

$$\tau(x)=\mu_2(0)+\frac{2}{2-e}\left[e\left(2-e^x\right)\int_0^1 e^{-t}\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt-\left(e-e^x\right)\int_0^1 \psi\left(\frac{t}{2}\right)dt\right]-$$
$$-2e^x\int_0^x e^{-t}\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt-\mu_1(0)e+\mu_1(0)e^x \qquad (12)$$

koʻrinishda bir qiymatli topiladi.

Nomaʼlum $\tau(x)$ funksiya (12) formula bilan topilgandan soʻng $\nu(x)$ funksiya esa (8) formula orqali aniqlanadi. Natijada D_2 sohada 1-masalaning yechimi (7) formula bilan topiladi. Bundan esa qoʻyilgan 1-masala D_1 sohada quyidagi masalaga keladi.

2-masala. D_1 sohada bir jinsli

$$u_{xx}-u_y=0 \qquad (13)$$

issiqlik tarqalish tenglamasining (2), (3) va $u(x,0)=\tau(x),\ \ 0\le x\le 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\tau(x)$ funksiya (12) formula orqali aniqlanadi.

Endi 2-masalaning bir qiymatli yechilishini tadqiq qilaylik. Aytaylik, $u(x,y)$ funksiya 2-masalaning yechimi hamda $u(0,y)=\mu(y),\ 0\le y\le 1;\ \mu(y)\in C[0,1]$ boʻlsin. U holda (13) tenglama uchun ushbu

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1,\ \ u(0,y)=\mu(y),\ 0\le y\le 1,\ u(1,y)=\mu_2(y),\ 0\le y\le 1$$

birinchi chegaraviy masalaga ega boʻlamiz, bu yerda $\mu(y)$ nomaʼlum funksiya. Xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasiga koʻra D_1 sohada issiqlik tarqalish tenglamasi birinchi chegaraviy masalaning yechimi $u(x,y)$ funksiya funksiya

$$u(x,y)=\int_0^1 \tau(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi+$$

$$+\int_0^y \mu(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y \mu_2(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta \qquad (14)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}.$$

(15)

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning yechimi $u(x,y)$ funksiya ko'rinishi (14) formulani (3) shartga bo'ysundirsak,

$$\int_0^1\left[\int_0^1 \tau(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi+\int_0^y \mu(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y \mu_2(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta\right]dx+$$

$$+\mu_1(y)=\mu(y) \qquad (16)$$

hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikda belgilash kiritib, so'ngra integrallash tartibini o'zgartirsak,

$$\mu(y)-\int_0^y \mu(\eta)d\eta\int_0^1 G_\xi(x,y;0,\eta)dx=g(y),\ y\in[0,1], \qquad (17)$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$g(y)=\int_0^1\left\{\int_0^1 \tau(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-\int_0^y \mu_2(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta\right\}dx+\mu_1(y).$$

So'ngra, $\frac{\partial G}{\partial \xi}=-\frac{\partial G_1}{\partial x}$ ekanligini e'tiborga olib[**],

$$\int_0^1 G_\xi(x,y;0,\eta)dx=-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+K_0(y,\eta) \qquad (18)$$

ega bo'lamiz, bu yerda

$$G_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\},$$

$$K_0(y,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(2n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(n)^2}{(y-\eta)}\right]\right\}. \qquad (19)$$

(18) tenglikni inobatga olsak, u holda (17) munosabat quyidagi

$$\mu(y)-\int_0^y \mu(\eta)K_1(y,\eta)d\eta=g(y),\quad 0\le y\le 1. \qquad (20)$$

ko'rinishga keladi, bu yerda

$$K(y,\eta)=\left\{\left[-\pi(y-\eta)\right]^{-1/2}+K_0(y,\eta)\right\}.$$

(20) ifoda noma'lum $\mu(y)$ funksiyaga nisbatan 2-tur Volterra integral tenglamasi bo'lib, uning $K_1(y,\eta)$ yadrosi kuchsiz maxsuslikka ega.

Shunday qilib, quyidagi funksiya

$$\left\{\int_0^1 \tau(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-\int_0^y \mu_2(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta\right\}dx$$

$\bar{D}_1$ sohada $u_{xx}-u_y=0$ tenglamaning uzluksiz yechimi bo'lib, $u(x,0)=\tau(x),\ x\in[0,1]$;$u(0,y)=0$, $u(1,y)=\mu_2(y)$, $y\in[0,1]$ shartlarni qanoatlantirganligi sababli (20) tenglamaning o'ng tomonidagi $g(y)$ funksiya ham $[0,1]$ kesmada uzluksizdir. Bundan kelib chiqadiki, (20) tenglama Volterra integral tenglamalari nazariyasiga ko'ra, $[0,1]$ kesmada yagona uzluksiz $\mu(y)$ yechimga ega bo'ladi.

So'ngra, (20) tenglamadan topilgan noma'lum $\mu(y)$ funksiyani (14) tenglikka qo'yib 2-masalaning yechimini topamiz. Shuni ta'kidlash kerakki, 2-masala yechimining yagonaligi birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi va (20) integral tenglamadan kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. O'rinov A.Q. Parabolo-giperbolik tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. -Toshkent: Navr o'z, 2016. -216 bet.

2. Уринов А.К., Халилов К.С. Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Доклады АН РУз, 2014. №5. – С.6-9

3. Уринов А.К., Халилов К.С., Задача с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения // Научные ведомости БелГУ. Серия: Матем. Физика. – Белгород. 2015. №17(214). вып.40. – С. 143-146.

4. Уринов А.К., Халилов К.С., Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. –Ташкент. 2014. №2. – С. 6-9.

5. Уринов А.К., Халилов К.С., Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. –Ташкент. 2014. №5. – С. 8-10.

6. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. – Ташкент: Фан, 1979. – 120 с.