AMERICAN JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY BULLETIN
ISSN: 2996-511X (online) | ResearchBib (IF) = 9.512 IMPACT FACTOR
Volume-4| Issue-1| 2026 Published: |30-01-2026|

МЕТОД ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

https://doi.org/10.2591/zenodo.18267694

А. Имомов
НамГУ, кафедра образования цифровых технологий
ф.-м.ф.н.,21.02.1950
adashimomov50@gmail.com, Tel: +998 94 805 2552

Аннотация

Для собственных значений матриц рассмотрен метод ортогонализации векторов. Метод ортогонализации позволяет найти минимальный многочлен для нахождения собственных значений. В математической системе Mathcad и Python даны вычислительные алгоритмы.

Ключевые слова

собственные значения, метод ортогонализации, алгоритмы и эксперименты в математической системе Mathcad и Python .

METHOD OF ORTOGONALIZATION FOR MATRIX EIGENVALUES

Imomov Adash
Namangan State University,
Gmail: adashimomov50@gmail.com, Tel: +998 94 805 2552

Abstract

Discusses the method of ortogonalization for eigenvals problem of matrix. Enlarged algorithms and programs have been built in the Mathcad and Python mathematics systems. For many matrix obtained almost identical numerical values of eigenvalues.

Keywords

eigenvals and eigenvectors, method of ortogonalization, the large algorithms in Mathcad and Python.

МЕТОД ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Imomov Adash
Namangan Davlat Universiteti
Gmail: adashimomov50@gmail.com, Tel: +998 94 805 2552

Annotasiya

Matrisaning xos sonlari uchun ortogonallashtirish metodi, Mathcad va Python.mathematik tizimlarida yiriklashgan algoritm va dasturlar keltirilgan. Usul har xil matrisada sinab ko’rilgan.

Kalit so’zlar

matrisalarning xos sonlari uchun ortogonallasshtirish usuli, matematic tizimlar Mathcad va Pythonlarda algotitm va dasturlar.

Введение. Рассмотрим задачу о собственных значений [1-9]:

Ax=λ x, x≠0, λ=λ(A), **(1)**

где A- **матрица порядка** $n \times n$. **В этом уравнении неизвестные: n-скалярных величин** λ **и n собственных векторов. Задача (1) однородная система**

линейных уравнений по x, поэтому ненулевое решение существует тогда и только тогда, когда матрица системы имеет детерминант, равного нулю

$$\det(A-\lambda E)=(-1)^n(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-\ldots p_{n-1}\lambda-p_n)=0, \qquad (2)$$

$$p_1=s_1, k=2..n: p_k=(s_k-\sum_{i=1}^k p_i s_{k-i})/k\,, s_k=a_{11}^k+\cdots a_{nn}^k. \ (3)$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением (кратко ХУ).

Так что, нахождения λ=λ(A) достаточно трудоёмкая задача.

Цель работы**.** Для поиска собственных значений симметрических матриц разработаны итерационные методы вращений Якоби, Гивенса. Для произвольных матриц имеются классические методы Леверрье, Фаддеева, Крылова, Микеладзе, Кублановской-Френсиса QR, Данилевского, Хессенберга. В данной работе рассматривается метод ортогонализации. Метод достаточно прост и нагляден, очень похож на метод Хесссенберга, который основан на приведение данную полную матрицу в подобную трапецивидную матрицу, у которой ниже первой поддиогонали все элементы равны нулю.

Обзор литературы. Теория собственных значений имеются в известных книгах [1-12]. Алгебраический подход к приближёным методам собственных значений имеется в [4,7]. Причём, в [4] рассмотрены достаточно обширные методы с программамы на языке Бейсик. Задача о собственных значений для несимметрических матриц рассмотрена в [7]. Программы на языке Algol имеются в [8]. В работе [8] имеются программы для максимального собственного значеня и классичеслого метода и Микеладзе на трёх языках: Бейсик, Паскаль и Фортран. Появились программы -укрупнённые алгоритмы на языке Python [10-12]. В [12] имеются укрупнёные алгоритмы нахождения собственных значений в Mathcad. Польное изложение укрупнённых алгоритмов в Mathcad и Python имеется в [12]. В них имеются укрепнённые алгоритмы в Mathcad и Python методов команд, классического двухступенчатого метода , методов Леверрье, Фаддеева и Крылова, Микеладзе, LR,QR, Данилевского, Якоби, Хессенберга.

В математических системах типа Mathcad и Python задачи решаются с помощью математического алгоритма решения задачи. Mathcad, Python выступают в качестве исполнителя *укрупнённого алгоритма*, а пользователь играет роль создателя алгоритма. *Под укрупнённым алгоритмом (the largest algorithm) мы понимаем последовательность математических формул, и команд математической системы, дающую решение задачи*. В зарубежной литературе [6, с.16] имеется подобный термин: *"programming-in-the-large"*. Эти команды математической системы и являются крупной командой, например, внутренняя функция вычисления степеней матрицы и их следов, решение системы линейных уравнений, вычисления собственных значений, определителя, обратной матрицы, интеграла, решение дифференциального уравнения, и т.д. Мы построили укрупнённые алгоритмы для методов: классического двухступенчатого метода, методов Леверрье, Фаддеева, Микеладзе, Крылова, Данилевского, Якоби, Хессенберга и QR-алгоритма. Результаты наших укрупнённых алгоритмов мы проверяем внутренными функциями eigenvals(A) (Mathcad) или eigvalues(A) (Python) по нахождению собственных значений.

В настоящей работе рассматривается метод ортогонализации. Метод ортогонализации похож на метод Хессенберга и задачу нахождения собственных значений матриц сводит к нахождению собственных значений подобной трапецеидальной матрицы с многими нулями ниже диагонали.

Приведём несколько основных понятий, которыми мы будем использовать. Две матрицы A, B называются подобными, если существует неособенная матрица S такая, что $B = S^{-1}AS$.

Теорема 1. Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Действительно, вычислим характеристические уравнения и найдём связь между ними: $|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES| = |S^{-1}||A - \lambda E||S|$=$|A - \lambda E|$.

Теорема 2.Собственные векторы подобных матриц саязаны линейно: если $Ax = \lambda x$, то для $By = \lambda y, B = S^{-1}AS, x = Sy$. Доказательство. Ясно, что

$$S^{-1}ASy = \lambda y \longrightarrow ASy = \lambda Sy \longrightarrow Ax = \lambda x.$$

Теорема 3. Матрица удовлетворяеть своему характеристическому уранению. Краткое доказательство. $D(\lambda)_{\lambda=A} = |A - \lambda E| = |A - AE| = 0$.

AMERICAN JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY BULLETIN
ISSN: 2996-511X (online) | ResearchBib (IF) = 9.512 IMPACT FACTOR
Volume-4| Issue-1| 2026 Published: |30-01-2026|

Теорема 4. Матрицы A^T, A имеют одинаковые собственные значения.[1].

2.Метод ортогонализации. Алгоритм состоит из следующих шагов

Первый шаг.Возмём некоторый начальный вектор x^1 и строим новый ортогоналный вектор к $x^2 = Ax^1 - g_{11}x^1$, т. е. $(x^2, x^1) = 0$ и это даст

$$g_{11} = \frac{(Ax^1, x^1)}{(x^1, x^1)}.$$

Второй шаг.Построим новый вектор $x^3 = Ax^2 - g_{21}x^1 - g_{22}x^2$, ортогональный к векторам x^1 и x^2. Это даст нам равенства

$$g_{21} = \frac{(Ax^2, x^1)}{(x^1, x^1)}, g_{22} = \frac{(Ax^2, x^2)}{(x^2, x^2)},$$

Общий шаг k. Построим вектор

$$x^{k+1} = Ax^k - g_{k1}x^1 - g_{k2}x^2 - \cdots - g_{k1}x^k = Ax^k - \sum_{j=1}^{k} g_{kj}x^j \qquad (1)$$

ортогональный, предыдущим векторам (x^{k+1}, x^i)=0,i=1..k. Это даст матрицу

g= $[g_{kj}] = [\frac{(Ax^k, x^j)}{(x^j, x^j)} \neq 0, k \geq j, j = 1..k]$.

Рассмотрим матрицы G=$[g_{kj}]$, H=G^T, где они имеют вид:

$$G := \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{2,1} & . & g_{n-1,1} & g_{n,1} \\ 1 & g_{2,2} & . & g_{n-1,2} & g_{n,2} \\ 0 & 1 & . & g_{n-1,3} & g_{n,3} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & g_{n,n} \end{bmatrix}, H = G^T = \begin{bmatrix} g_{1,1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{2,1} & g_{2,2} & 1 & 0 & 0 \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{33} & 1 & 0 \\ . & . & . & . & 1 \\ g_{n,1} & g_{n,2} & . & g_{n,n-1} & g_{n,n} \end{bmatrix}$$

Теорема 5. Матрицы A , G, H подобны.

Вид второй матрицы наиболее привечен.

Введём последовательность многочленов:

$f_0(x) = 1, f_1(x) = (x - g_{11})f_0(x), f_2(x) = (x - g_{22})f_1(x) - g_{21}f_0(x),...,$

$f_k(x) = (x - g_{kk})f_{k-1}(x) - g_{kk-1}f_{k-2}(x) - \cdots - g_{k1}P_0\ (x) \qquad (2)$

Так как в n-мерном пространстве существует лишь n попарно ортогональных векторов, то при некотором $m \leq n$ получится нулевой вектор x^{k+1}. Равенство

$$0 = Ax^m - g_{m,1}x^1 - g_{m,2}x^2 - ... - g_{m,m}x^m = (A - g_{m,m})f_m(A)x^1 - g_{m,m-1}f_{m-1}(A)x^1 - ...$$
$$-g_{m,1}f_1(A)x^1 = P_m(A)x^1$$

говорит о том, что векторы $x^1, Ax^1, ..., Ax^m$ линейно зависимыми и многочлен $f_m(A)$ есть минимальный многочлен матрицы A.

Пример 1.Двумерная матрица. Приведём укрупнённый алгоритм и расчёт.

AMERICAN JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY BULLETIN
ISSN: 2996-511X (online) | ResearchBib (IF) = 9.512 IMPACT FACTOR
Volume-4| Issue-1| 2026 Published: |30-01-2026|

$ORIGIN := 1 \qquad n := 2$

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda := eigenvals(A) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x^{\langle 1 \rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \cdot x^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g_{1,1} := \dfrac{A \cdot x^{\langle 1 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}}{x^{\langle 1 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}} \qquad x^{\langle 2 \rangle} := A \cdot x^{\langle 1 \rangle} - g_{1,1} \cdot x^{\langle 1 \rangle} \quad x^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g_{2,1} := \dfrac{A \cdot x^{\langle 2 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}}{x^{\langle 1 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}} \qquad g_{2,2} := \dfrac{A \cdot x^{\langle 2 \rangle} \cdot x^{\langle 2 \rangle}}{x^{\langle 2 \rangle} \cdot x^{\langle 2 \rangle}} \qquad g_{2,1} = 4 \qquad g_{2,2} = 1$

$x^{\langle 3 \rangle} := A \cdot x^{\langle 2 \rangle} - g_{2,1} \cdot x^{\langle 1 \rangle} - g_{2,2} \cdot x^{\langle 2 \rangle} \quad x^{\langle 3 \rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ x3=0 следовательно x1-анулирует ХУ

$G := \begin{pmatrix} g_{1,1} & 1 \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda := eigenvals(G) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad H := G^T \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$X^{\langle 1 \rangle} := x^{\langle 1 \rangle} \qquad X^{\langle 2 \rangle} := x^{\langle 2 \rangle} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad GG := X^{-1} \cdot A \cdot X \qquad GG = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$s := eigenvals(G) \quad s = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ss := eigenvals(H) \quad ss = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$sr := eigenvals(GG) \quad sr = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v := eigenvecs(G) \quad v = \begin{pmatrix} 0.447 & -0.447 \\ 0.894 & 0.894 \end{pmatrix}$

Собственные векторы: $vv := X \cdot eigenvecs(GG) \quad vv = \begin{pmatrix} 0.894 & -0.894 \\ 0.894 & 0.894 \end{pmatrix} \quad GG_{1,2} = 4 \quad g_{1,2} = 0$

Мы получили одинаковые ответы двумя способами: 1) методом команд; 2) методом ортогонализации. Элемент 1 $= g_{1,2}$ имеет существеннон значение. Без него результат неверен.

Пример 2. Четырёхмерная матрица. Приведём укрупнённый алгоритм и вычисления. Матрица, у которой с ненулевыми элементами выше главной диогонали и дополнительная один диогональ ниже главной диогонали называется верхней трапецивидной матрицей. Аналогично вводиться нижняя трапецивидная матрица. Метод Хессенберга сводить произвольную матрицу к трапецивидной матрице. Для симметричной матрицы трапециадальная форма матрицу сводить к трёхдиогональной форме.Таким образом, метод Хессенберга упрощает заданную матрицу. Метод ортогонализации также сводить произвольную матрицу к трапецивидной матрице и является упрощающим методом.

Приведём вычисления для четырёхмерной матрицы.Здесь также элементы $g_{2,1} = g_{3,2} = g_{4,3} = 1$,имеет существенное значения, без них результат неверный.

AMERICAN JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY BULLETIN
ISSN: 2996-511X (online) | ResearchBib (IF) = 9.512 IMPACT FACTOR
Volume-4| Issue-1| 2026 Published: |30-01-2026|

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad n := 4 \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda := \text{eigenvals}(A) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -2.828 \\ -2 \\ 2.828 \\ 10 \end{pmatrix} \quad x^{\langle 1 \rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{1,1} := \frac{A \cdot x^{\langle 1 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}}{x^{\langle 1 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}} \quad x^{\langle 2 \rangle} := \left(A \cdot x^{\langle 1 \rangle}\right) - g_{1,1} \cdot x^{\langle 1 \rangle} \quad x^{\langle 2 \rangle T} \rightarrow (0 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4)$$

$$g_{2,1} := A \cdot x^{\langle 2 \rangle} \cdot \frac{x^{\langle 1 \rangle}}{x^{\langle 1 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}} \quad g_{2,2} := A \cdot x^{\langle 2 \rangle} \cdot \frac{x^{\langle 2 \rangle}}{x^{\langle 2 \rangle} \cdot x^{\langle 2 \rangle}} \quad g_{2,1} = 29 \quad g_{2,2} = 6.241$$

$$x^{\langle 3 \rangle} := A \cdot x^{\langle 2 \rangle} - g_{2,1} \cdot x^{\langle 1 \rangle} - g_{2,2} \cdot x^{\langle 2 \rangle} \quad x^{\langle 3 \rangle T} = (0 \ \ 9.517 \ \ 0.276 \ \ -4.966)$$

$$g_{3,1} := A \cdot x^{\langle 3 \rangle} \cdot \frac{x^{\langle 1 \rangle}}{x^{\langle 1 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}} \quad g_{3,2} := A \cdot x^{\langle 3 \rangle} \cdot \frac{x^{\langle 2 \rangle}}{x^{\langle 2 \rangle} \cdot x^{\langle 2 \rangle}} \quad g_{3,3} := \frac{A \cdot x^{\langle 3 \rangle} \cdot x^{\langle 3 \rangle}}{x^{\langle 3 \rangle} \cdot x^{\langle 3 \rangle}}$$

$$g_{3,1} = 0 \quad g_{3,2} = 3.976 \quad g_{3,3} = 2.314$$

$$x^{\langle 4 \rangle} := A \cdot x^{\langle 3 \rangle} - g_{3,1} \cdot x^{\langle 1 \rangle} - g_{3,2} \cdot x^{\langle 2 \rangle} - g_{3,3} \cdot x^{\langle 3 \rangle} \quad x^{\langle 4 \rangle T} = (0 \ \ -5.282 \ \ 15.847 \ \ -9.244)$$

$$g_{4,1} := \frac{A \cdot x^{\langle 4 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}}{x^{\langle 1 \rangle} \cdot x^{\langle 1 \rangle}} \quad g_{4,2} := \frac{A \cdot x^{\langle 4 \rangle} \cdot x^{\langle 2 \rangle}}{x^{\langle 2 \rangle} \cdot x^{\langle 2 \rangle}} \quad g_{4,3} := \frac{A \cdot x^{\langle 4 \rangle} \cdot x^{\langle 3 \rangle}}{x^{\langle 3 \rangle} \cdot x^{\langle 3 \rangle}} \quad g_{4,4} := \frac{A \cdot x^{\langle 4 \rangle} \cdot x^{\langle 4 \rangle}}{x^{\langle 4 \rangle} \cdot x^{\langle 4 \rangle}}$$

$$g_{4,1} = 0 \quad g_{4,2} = 3.92 \times 10^{-15} \quad g_{4,3} = 3.161 \quad g_{4,4} = -1.555$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9.517 & -5.282 \\ 0 & 3 & 0.276 & 15.847 \\ 0 & 4 & -4.966 & -9.244 \end{pmatrix} \quad G := \begin{pmatrix} g_{1,1} & 1 & 0 & 0 \\ g_{2,1} & g_{2,2} & 1 & 0 \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} & 1 \\ g_{4,1} & g_{4,2} & g_{4,3} & g_{4,4} \end{pmatrix} \quad GG := x^{-1} \cdot A \cdot x \quad H := G^T$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 29 & 6.241 & 1 & 0 \\ 0 & 3.976 & 2.314 & 1 \\ 0 & 3.92 \times 10^{-15} & 3.161 & -1.555 \end{pmatrix} \quad GG = \begin{pmatrix} 1 & 29 & 0 & 0 \\ 1 & 6.241 & 3.976 & 4.441 \times 10^{-15} \\ 0 & 1 & 2.314 & 3.161 \\ 0 & 0 & 1 & -1.555 \end{pmatrix}$$

$$s := \text{eigenvals}(G) \quad ss := \text{eigenvals}\left(G^T\right) \quad s^T = (10 \ \ 2.828 \ \ -2.828 \ \ -2)$$

$$x^{\langle 5 \rangle} := \left(A \cdot x^{\langle 4 \rangle} - g_{4,4} \cdot x^{\langle 4 \rangle}\right) - g_{4,1} \cdot x^{\langle 1 \rangle} - g_{4,2} \cdot x^{\langle 2 \rangle} - g_{4,3} \cdot x^{\langle 3 \rangle}$$

$$x^{\langle 5 \rangle T} = \left(0 \ \ 1.776 \times 10^{-14} \ \ -9.77 \times 10^{-15} \ \ 0\right) \qquad \text{почти нуль}$$

$$s := \text{eigenvals}(G) \quad s^T = (10 \ \ 2.828 \ \ -2.828 \ \ -2) \quad ss := \text{eigenvals}(H) \quad ss^T = (10 \ \ 2.828 \ \ -2.828 \ \ -2)$$

Программа в Python

import numpy as np

```
A = np.array([[1,2,3,4], [2,3,4,1],            [3,4,1,2],            [4,1,2,3]], dtype=float)
n = A.shape[0]
# x и g matriti
x = np.zeros((n, n));g = np.zeros((n, n))
# nachalniy vektor
x[:, 0] = np.array([1.0, 0.0, 0.0, 0.0])
# Ortogonalizatsiya
for i in range(1, n):
v = A @ x[:, i-1]
for j in range(i):
g[j, i-1] = np.dot(v, x[:, j]) / np.dot(x[:, j], x[:, j])
v = v - g[j, i-1] * x[:, j]
x[:, i] = v
# Преобразование подобия
GG = np.linalg.inv(x) @ A @ x
# Вывод собственных значений
lA = np.linalg.eigvals(A)  print(“lA=”,lA=)   lA=[10, 2.828,-2.828,-2]
lGG = np.linalg.eigvals(GG) print(“lGG=”)   lGG=[10, 2.828,-2.828,-2]
```

ЛИТЕРАТУРА:

1.Демидович Б.П. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. -644.

2.Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики, т.1-.ВШ, Минск, 1972.-584 с.

3. Фаддеев Д.К. , Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Наука,1963.-656 с.

4.Шуп Т. Прикладные численные методы в физике и технике. М.: ВШ, 1990.-256 с.

5. Gezerlis A. Numerical Methods in Physics with Phyton. Cambridge Univ. Press. New York.-2020.-605 p.

6.Kiusalaas J. Numerical Methods in Engineering with Phyton 3. Cambridge Univ. Press. New York.-2013.-424 p.

7.Икрамов Х.Д. Несимметрическая проблема собственных значений. М.:Наука, 1991.-240 с.

8.Мудров Е.М. Программы для ПК на языке Бейсик, Паскаль, Фортране.Томск, МП Раско, 1992.-272 с.

9.Вабищевич П.Н. Численные методы. Вычислительный практикум. Python. М.: Либроком-2010.-320 р.

10.Имомов А.Решение польной проблемы собственных значений матриц в Mathcad. Научный вестник НамГУ, 2021, №5, с. 62-67.

11. Имомов А. Математические системы-исполнители –укрупнённых алгоритмов. Н.: НамГУ,2023, 254 с.

12. Имомов А., Абдукадыров Э. Методы команд, Леверрье, Микеладзе,

Крылова для собственных значений матриц. Халкаро конференция «Суньий интелект ва ракамли таълим технологиялари». Самарканд, СамДУ, 2024.