AMERICAN JOURNAL OF EDUCATION AND LEARNING
ISSN: 2996-5128 (online) | ResearchBib (IF) = 10.91 IMPACT FACTOR
Volume-3| Issue-9| 2025 Published: |30-10-2025|

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА

https://doi.org/10.5281/zenodo.17354768

Газиев Кобилжон Солижонович
кандидат физ.-мат. наук, доцент,ФерГУ, Фергана, Узбекистан.
E-mail: <goziyevqobiljon@gmail.com>

Annotation

In the paper, a boundary value problem has been formulated for a fourth - order equation of a complex type. The uniqueness of the solution of the considered problem has been provided using the methods of energy integrals.

Keywords

Higher-order equation, Laplace operator, uniqueness of the solution, energy integral.

Постановка задачи и единственность решения.

В области рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(U_{xx}+U_{yy}\right)+CU=0, \ (x,y)\in D_1, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(U_{xx}-U_{yy}\right)=0, \qquad (x,y)\in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где D_1- область ограниченная нормальным контуром и отрезком $\left[A(0,0),\, B(1,0)\right]$ оси x. Через D_2 обозначим область ограниченную отрезком (AB) и характеристиками $AC: x+y=0$ и $BC: x+y=1$ для уравнения $U_{xx}-U_{yy}=0$. Совокупность областей D_1 и D_2 вместе открытом отрезком (AB) обозначим через D.

$$U\big|_{\Gamma}=f_1(x,y), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f_2(x,y), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le\frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right|_{AC}=\psi_3(x),\ 0\le x\le\frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_2(x),\ \frac{1}{2}\le x\le 1, \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right|_{BC}=\psi_4(x),\ \frac{1}{2}\le x\le 1, \qquad (7)$$

здесь n - внешняя нормаль к границе области D, $f_i(x,y)$ $(i=1,2)$, $\psi_j(x)$ $\left(j=\overline{1,4}\right)$ - заданные функции, удовлетворяющие естественным условиям согласования, обеспечивающие ниже требуемую гладкость решения.

Отметим, что некоторые задачи для уравнения составного и смешанно-составного типов рассмотрены в работах [1.2].

Задача. Требуется определить функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами:

1^0. Она является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y\neq 0$.

2^0. Непрерывная в $\overline{D}$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

3^0. Удовлетворяет краевым условиям (2)-(7).

4^0. Функция $U(x,y)$ и её производные до третьего порядка включительно удовлетворяют на отрезке AB непрерывным условиям склеивания.

Применим следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&U(x,-0)=U(x,+0)=\tau(x),\\
&U_y(x,-0)=U_y(x,+0)=\nu(x),\\
&U_{yy}(x,-0)=U_{yy}(x,+0)=\mu(x),\\
&U_{yyy}(x,-0)=U_{yyy}(x,+0)=\theta(x).
\end{aligned} \qquad (8)$$

Уравнение (1) в области D_2 перепишем в виде

$$U_{xx}-U_{yy}=y\omega_{21}(x)+\omega_{22}(x) \qquad (9)$$

Общее решение уравнения (9) выражается формулой [3]

$$U(x,y)=F(x+y)+\Phi(x-y)+\frac{1}{4}\int_0^{x+y}d\zeta\int_1^{x-y}\left[\omega_{22}\left[\frac{\zeta+\eta}{2}\right]+\frac{\zeta-\eta}{2}\omega_{21}\left[\frac{\zeta+\eta}{2}\right]\right]d\eta. \qquad (10)$$

Используя условия (4), (7) находим

$$y\omega_{21}(x)+\omega_{22}(x)=a(x,y), \qquad (11)$$

где

$$a(x,y)=\begin{cases} a_{21}(x,y), & (x,y)\in D_{21},\\ a_{22}(x,y), & (x,y)\in D_{22},\end{cases}$$

AMERICAN JOURNAL OF EDUCATION AND LEARNING
ISSN: 2996-5128 (online) | ResearchBib (IF) = 10.91 IMPACT FACTOR
Volume-3| Issue-9| 2025 Published: |30-10-2025|

$$a_{21}(x,y)=4(y+x)\psi_3'(x)+2\sqrt{2}(1+x)\psi_1''(x)-2\sqrt{2}\psi_1'(x),$$
$$a_{22}(x,y)=2\sqrt{2}(y-x+1)\psi_2''(x)+4(y+1)\psi_1'(x)+2\sqrt{2}\psi_3'(x), \qquad (12)$$

здесь

$$D_{21}=\{(x,y);\ 0\le x\le 1/2,\ -x\le y\le 0\},$$
$$D_{22}=\{(x,y);\ 1/2\le x\le 1,\ x-1\le y\le 0\}.$$

Правая часть уравнения (9) стала известной. В силу условия 4^0 задачи D, при $y\to 0$ из (9) имеем

$$\tau''(x)-\mu(x)=a(x,0).$$

Из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_{xx}-u_{yy})=\omega_{21}(x),$$

при $y\to 0$ получим

$$\theta(x)=\nu''(x)+\omega_{21}(x)$$

1. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Теорема 1. Если $C(x,y)\ge 0$ то, задача может иметь не более одного решения.

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу, т.е.

$$f_i(x,y)=0,\ \psi_j(x)=0,\ i=1,2;\ \ j=1,3. \qquad (13)$$

Пусть $V(x,y)$ некоторая функция из класса $C^1(\overline{D}_2)\cap C^2(D_2)$ тогда справедливо равенство

$$V\square U-U\square V=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial K}{\partial y}, \qquad (14)$$

где

$$H=(UV)_x-2V_xU,\ K=-(UV)_y+2V_yU.$$

Интегрируя (14) в области D_2 имеем

$$\iint_{D_2}(V\square U-U\square V)dxdy=2\int_{AC}V(U_x-U_y)dy-\int_{CB}U(V_x-V_y)dx-$$
$$-\int_{BA}(V_yU-U_yV)dx-2U(C)V(C)+U(A)V(A)+U(B)V(B). \qquad (15)$$

В силу (13) из (9) следует что

$$\square U=0. \qquad (16)$$

Учитывая (8), полагая в (15) $V=U_x(x,y)-U_y(x,y)$ и используя (16) получим

$$\int_{AC}(U_x-U_y)^2dy-2\int_{CB}U(U_{xx}-U_{yy})dx+\int_0^1(\tau'(x)-\nu(x))^2dx=0. \qquad (17)$$

Так как $\psi_j(x)=0$ то из (10) будем иметь

$$U_{xx}=F''(x+y)+\Phi''(x-y),$$
$$U_{yy}=F''(x+y)+\Phi''(x-y).$$

В силу этого из (17) находим

$$\tau'(x)-\nu(x)=0. \qquad (18)$$

Теперь преобразуя тождество в D_1

$$\iint_{D_1}\left[U\frac{\partial^2}{\partial y^2}(U_{xx}+U_{yy})+CU\right]dxdy=0$$

мы получим следующее равенство

$$\iint_{D_1}\left[(UU_{xxy})_y-(U_yU_{xy})_x+U_{xy}^2+(UU_{yyy})_y-(U_yU_{yy})_y+U_{yy}^2+CU^2\right]dxdy=0. \qquad (19)$$

Интегрируя по частям (19) имеем

$$\int_{\Gamma}-UU_{xxy}dx-U_yU_{xy}dy-UU_{yyy}dx+U_yU_{yy}dx+$$
$$+\iint_{D_1}\left[U_{xy}^2+U_{yy}^2+CU^2\right]dxdy=0.$$

Известно, что

$$U_x=U_n\cos(x,n)+U_s\cos(x,s),$$
$$U_y=U_n\cos(y,n)+U_s\cos(y,s),$$

так как $U|_{\Gamma}=0$, то $\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_{\Gamma}=0$.

В силу этого из условия (3) следует что $U_x=U_y=0$ на Γ.

Используя однородные условия (13) из последнего равенства получим

$$\int_{AB}-UU_{xxy}dx-UU_{yyy}dx+U_yU_{yy}dx+\iint_{D_1}\left[U_{xy}^2+U_{yy}^2+CU^2\right]dxdy=0. \qquad (20)$$

Используя соотношение между функциями $\tau(x),\nu(x),\mu(x)$ и $\theta(x)$ вычислим первый интеграл

$$J=\int_{AB}(-\tau\nu''-\tau\theta+\nu\mu)\,dx=\int_{AB}(-\tau\nu''-\tau\nu''+\tau'\tau'')dx=$$
$$=\int_{AB}(-2\tau\nu''+\tau'\tau'')dx.$$

В силу условий $\tau(0)=\tau(1)=0,\ \tau'(0)=\tau'(1)=0$ получим что, $\tau(x)=0$.

Тогда из (20) получим

$$\iint_{D_1}(U_{xy}^2+U_{yy}^2+CU^2)dxdy=0 \qquad (21)$$

Если $C\neq 0$, то из (21) следует, что $U\equiv 0$ в $\overline{D_1}$.

Если $C=0$, то из (20) следует, что $U_x=U_y=const$, так как $U\in C^2\left(\overline{D_1}\right)$ имеем что $U_x=U_y=0$ в $\overline{D_1}$. Легко показать, что решение задачи

$$U_x=0,\ U\big|_{\Gamma_1}=0$$

является только тривиальным. Таким образом $U\equiv 0$ в $\overline{D_1}$. Тогда и $U(x,0)=0$.

В силу этого из (18) следует что $\nu(x)=0$ на AB. В силу единственности решения задачи Коши для уравнения (16) $U(x,y)\equiv 0$ в D_2. Следовательно $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. **Джураев Т.Д.** Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно- составного типов. Ташкент. Фан. 1979.-240 с.
2. **Газиев К.С.** «Краевая задача для уравнения четвертого порядка смешанно-составного типа. Узб. Мат. журнал. 1995, №.2, с.25-36
3. **Тихонов А.Н. , Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М. Наука 1977.-736с.