

APPLICATION OF PRIVATE METHODS

<https://doi.org/10.5281/zenodo.15642985>

Normatov A. A

Lecturer at the Kokand State University, Uzbekistan

Tolipov R. M

Lecturer at the Kokand State University, Uzbekistan

Annotation

This article shows some non-standard methods for solving irrational and exponential equations, finding implicit functions and simplifying algebraic expressions. These methods expand students' thinking, inspire them to think and seek rational ways in solving problems.

Keywords

designation, factorization, extraneous root, exponentiation, polynomial equality, root properties

Ключевые слова: обозначение, разложение на множители, посторонний корень, возведение в степень, равенство многочленов, свойства корня

Есть такие уравнения, для которых обычные способы решения уравнений не всегда удобные. Иногда применение эти способов приводят к некоторым сложностям. Например, постараемся решить это уравнение таким способом:

$$2\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Для решение этого уравнения возведем в куб обе части этого уравнение:

$$(2\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2})^3 = (3\sqrt[3]{x^2-1})^3$$

По формуле куба суммы двух слагаемых имеем:

$$8(x-1)^2 + 12\sqrt[3]{(x-1)^4}\sqrt[3]{(x+1)^2} + 6\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt[3]{(x+1)^4} + (x+1)^2 = 27(x^2-1).$$

Вот здесь начинается проблема. Что будем дальше?

Продолжение этого способа приведёт нас только к решению более сложного уравнения высшей степени. Но и есть более простые способы, так называемые частные способы, которые могут дать нам результат решения очень коротким путём. Ниже показаны некоторые такие частные способы, для решения разных задач. Иногда ввод обозначения каких-то выражений буквами в уравнении даст нам более простое уравнение, чем исходное.

1. Решите уравнение: $2\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2-1}$

Решение. Введем обозначение в уравнении:

$$2\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2-1} :$$

$\sqrt[3]{x-1} = a, \sqrt[3]{x+1} = b;$ Тогда уравнение принимает вид:

$$2a^2 + b^2 = 3ab$$

Это уравнение более простое, чем исходное.

Теперь решим это уравнение: $2a^2 + b^2 - 3ab = 0,$

$$2a^2 + b^2 - 2ab - ab = 0,$$

$$2a(a-b) - b(a-b) = 0, (2a-b)(a-b) = 0.$$

Откуда $2a = b, a = b$. Итак, если учитываем, что $\sqrt[3]{x-1} = a$ и

$\sqrt[3]{x+1} = b$ то решение данное уравнение

$2\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2-1}$ приведётся к решению уравнения

$2\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x+1}$ и $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x+1}$. Решая уравнение

$2\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x+1}$, получим решение $x = 1\frac{2}{7}$, а уравнение

$\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x+1}$ не имеет решений. Наконец, получим ответ: $x = 1\frac{2}{7}$.

2. Найти произведение корней уравнения

$$2^{2x+4} - 10 \cdot 2^{x^2} + 4^{x^2-x} = 0.$$

Решение. Вместо уравнения $2^{2x+4} - 10 \cdot 2^{x^2} + 4^{x^2-x} = 0$ напомним

$2^{2x+4} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x^2-2x} = 0$ или $2^4 \cdot 2^{2x} - 10 \cdot 2^{x^2} + (2^{x^2})^2 \cdot 2^{-2x} = 0$ и

введем обозначение в последнем уравнении: $m = 2^{2x}, n = 2^{x^2}$. Тогда

уравнение $2^4 \cdot 2^{2x} - 10 \cdot 2^{x^2} + (2^{x^2})^2 \cdot 2^{-2x} = 0$ принимает вид

$16 \cdot m - 10 \cdot n + n^2 \cdot m^{-1} = 0$ или $16m^2 - 10 \cdot nm + n^2 = 0$. Это уравнение

равносильно уравнению $(n-2m)(n-8m) = 0$, откуда $n = 2m, n = 8m$.

Вместо n и m подставим в соответствии выражения 2^{x^2} и 2^{2x} и получим:

$2^{x^2} = 2 \cdot 2^{2x}, 2^{x^2} = 8 \cdot 2^{2x}$. Откуда имеем уравнения соответственно:

$x^2 = 1 + 2x, x^2 = 3 + 2x$. Решая эти уравнения получим корни данного

уравнения: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}, x_3 = -1, x_4 = 3$. И здесь найдем их

произведение: $(1 - \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot (-1) \cdot 3 = 3$

3. Найти сумму квадратов корней уравнения

$$(\sqrt{3x-2}-3)(4+\sqrt{x+3})=3x-11.$$

Решение. Введем обозначение: $\sqrt{3x-2} = a$, $\sqrt{x+3} = b$ Но здесь возникает проблема. Для того чтобы решить эту проблему найдем x в обозначении $\sqrt{3x-2} = a$: $3x-2 = a^2$, $x = \frac{a^2+2}{3}$.

Теперь исходное уравнение принимает такой вид:

$(a-3)(4+b) = a^2 - 9$. Раскроем скобки и разложим на множители:

$$4a + ab - 12 - 3b = a^2 - 9,$$

$$a^2 - 4a + 3 - ab + 3b = 0,$$

$$(a-1)(a-3) - b(a-3) = 0,$$

$$(a-3)(a-b-1) = 0.$$

Откуда $a-3=0$ или $a-b-1=0$, или $a=3$ или $a=b+1$. В равенстве $x = \frac{a^2+2}{3}$ при $a=3$ получается $x = \frac{11}{3}$ Теперь решим уравнение $a=b+1$, вместо a и b подставим выражения $\sqrt{3x-2}$ и $\sqrt{x+3}$ и соответственно получим

$\sqrt{3x-2} = \sqrt{x+3} + 1$. Возведя в квадрат обе стороны в последнем уравнении имеем вид $3x-2 = x+3+2\sqrt{x+3}+1$. После упрощения этого уравнения, получим следующее уравнение:

$x-3 = \sqrt{x+3}$. Возведя в квадрат обе стороны в последнем уравнении и решая квадратное уравнение $x^2 - 6x + 9 = x + 3$, получим $x = 1$, $x = 6$. Но здесь корень $x = 1$ посторонний.

Итак, имеем два корня $x = \frac{11}{3}$ и $x = 1$. Сумма квадратов этих корней равна: $(\frac{11}{3})^2 + 6^2 = 49\frac{4}{9}$.

4. Найти сумму всех значений коэффициентов a и b , если многочлен $x^4 + 8x^4 + ax^2 + bx + 1$ является квадратом некоторого многочлена.

Решение. Положим, что

$$x^4 + 8x^4 + ax^2 + bx + 1 = (x^2 + px + q)^2.$$

Возведем в квадрат правую часть этого уравнения и после упрощения получим:

$$x^4 + 8x^4 + ax^2 + bx + 1 = x^4 + 2px^3 + 2qx^2 + 2pqx + q^2$$

По равенству многочленов имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 2p = 8 \\ p^2 + 2q = a \\ 2pq = b \\ q^2 = 1 \end{cases}$$

Откуда из первых и четвертых равенств получим, что $p = 4$, $q = \pm 1$.

Подставляя эти значения во вторые и третьи равенства системы найдем значения a и b : $a = 18, a = 14, b = 8, b = -8$. Значит, сумма всех значений коэффициентов a и b равна: $18 + 14 + 8 + (-8) = 32$

5. Найти многочлен $f(x)$, если известно, что $f(x + 2) + f(x - 1) = 2(x^2 + 7)$.

Решение. Введем обозначение: $x + 2 = t$. Откуда $x = t - 2$. Теперь в равенстве $f(x + 2) + f(x - 1) = 2(x^2 + 7)$ вместо x подставим $t - 2$ и выполним элементарное преобразование:

$$\begin{aligned} f(t) + f(t - 3) &= 2((t - 2)^2 + 7) \\ &= 2(t^2 - 4t + 11) = 2t^2 - 8t + 22 = t^2 - t + 5 + t^2 - 7t + 17 = t^2 - t + 5 + \\ &+ t^2 - 7t + 12 + 5 = t^2 - t + 5 + (t - 3)(t - 3 - 1) + 5 = t^2 - t + 5 + \\ &+ (t - 3)^2 - (t - 3) + 5 \end{aligned}$$

Откуда вытекает, что $f(x) = x^2 - x + 5$.

6. Вычислить: $(\sqrt[4]{13} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{13}-1}{(\sqrt[4]{13}+1)^2}} + \frac{\sqrt[4]{13}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt[4]{13}-1)^2}})^{\frac{3}{5}} \cdot (\sqrt{13} - 1)^{\frac{4}{5}}$.

Решение. Введем обозначение $\sqrt[4]{13} = a$. Тогда получим $\sqrt{13} = a^2$. Теперь данное выражение принимает следующий вид:

$$(a \cdot \sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}} + \frac{a-1}{\sqrt[3]{(a^2-1)^2}})^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}} \quad (1).$$

Упрощаем это выражение, для этого в выражении $\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}}$

умножим на $a+1$ числитель и знаменатель подкоренного выражения: по следующему свойству корня n -й степени

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{a^n} = a, \quad \text{где } a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2-1}}{a+1} \quad (2) \text{ .Подставим (2) выражение в (1) выражение:}$$

$$\cdot (a \cdot \sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}} + \frac{a-1}{\sqrt[3]{(a^2-1)^2}})^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}} =$$

$$(a \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2-1}}{a+1} + \frac{a-1}{\sqrt[3]{(a^2-1)^2}})^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}} =$$

$$\left(\frac{a \cdot (a^2 - 1) + a^2 - 1}{(a+1)^3 \sqrt{(a^2 - 1)^2}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}} =$$

$$\left(\frac{(a+1) \cdot (a^2 - 1)}{(a+1)^3 \sqrt{(a^2 - 1)^2}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}} = a^2 - 1. \text{ Так как } a^2 = \sqrt{13}, \text{ получим}$$

ответ: $\sqrt{13} - 1$. Итак

$$\left(\sqrt[4]{13} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{13}-1}{(\sqrt[4]{13}+1)^2}} + \frac{\sqrt[4]{13}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt{13}-1)^2}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot (\sqrt{13} - 1)^{\frac{4}{5}} = \sqrt{13} - 1.$$

REFERENCES

1. Normatov Adxam Abdullayevich. (2023). Reflections and operations on them. INNOVATIVE ACHIEVEMENTS IN SCIENCE 2022
2. A. Normatov. About the importance and place of mathematical problems in mathematics lessons. JournalNX - A Multidisciplinary Peer Reviewed Journal.
3. Normatov, A. (2022). Text problems. INTERNATIONAL JOURNAL OF SOCIAL SCIENCE & INTERDISCIPLINARY RESEARCH, 11(11), 341-347.
4. Normatov, A. (2022). Applications of the derivative. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 10(12), 1161-1164.
5. A.A. Normatov, R.M. Tolipov. Some problems of combinatorics and the importance of Euler-Venn diagrams in solving them. Semiconductor Optoelectronics 42(2), 1412-1417.
6. Normatov A, Xojiqurbonova K, Xamroyeva M, Yunusova S, Ummataliyeva M. (2024). Relations in Sets. University Research Base, 162-164.
7. Normatov, A. (2023). Some applications of the definite integral. In Proceedings of International Conference on Modern Science and Scientific Studies, Vol. 2, No. 6, pp. 260-263.
8. Normatov, A. (2023). On the importance and role of mathematical problems in mathematics lessons. For Teachers, 19(2), 81-89.